Il Massimo Comune Divisore
e il
minimo comune multiplo

In questa pagina presenteremo le definizioni di e gli esercizi su: il Massimo Comune Divisore (MCD(a,b, …)) e il minimo comune multiplo (mcm(a,b, …)) di due o più numeri interi. Li presentiamo assieme perché i metodi che useremo per trovarli utilizzano entrambi la scomposizione in fattori primi, e sono molto simili, anche se non uguali, tra loro.

Cominciamo citando la definizione di Massimo Comune Divisore:

> *il Massimo Comune Divisore di due numeri interi a e b che non siano entrambi uguali a zero, si indica con MCD(a,b) ed è il numero naturale più grande per il quale possono entrambi essere divisi. Se entrambi i numeri a e b sono uguali a 0, allora si pone MCD(a,b)=0. [Cit. Wikipedia]*

e di minimo comune multiplo:

> *In matematica il minimo comune multiplo di due o più numeri interi a e b, indicato con mcm(a,b), è il più piccolo intero positivo multiplo sia di a sia di b. Se a=0 o b=0, allora mcm(a,b) è uguale a zero. [Cit. Wikipedia]*

Il calcolo del MCD e del mcm tramite la scomposizione in fattori primi

Trovare il *Massimo Comune Divisore* ed il *minimo comune multiplo* può diventare una operazione lunga e tediosa. Per fortuna c'è un metodo che semplifica di molto le operazioni.

Per arrivarci gradualmente analizziamo un primo esempio. Facciamo la scomposizione in fattori primi di 6: $6=2\times3$; e di 8: $8=2\times2\times2=2^3$. Notiamo che qualsiasi moltiplicazione dei fattori di una scomposizione in fattori primi porta ad un divisore del numero scomposto così, ad esempio, l'8 è divisibile per 2 e per $2\times2=2^2=4$. Facciamo anche la scomposizione in fattori primi del *MCD* e del *mcm* di 6 e di 8: il $MCD(6, 8)=2$, 2 è primo e quindi è già scomposto; Il $mcm(6, 8)=24$, la scomposizione in fattori primi di 24 è: $24=2^3\times3$.

Confrontiamo le scomposizioni in fattori primi dei numeri di cui calcolare il *MCD* ed in *mcm* e di questi ultimi. Nel caso del *MCD* la scomposizione è composta dal solo 2 che è presente sia nel 6 che nell'8 con lo stesso esponente con cui è presente nel 6. Nel caso del *mcm* la scomposizione è composta dal 2 e dal 3; il 2 è presente sia nel 6 che nell'8 con lo stesso esponente con cui è presente nell'8, il 3 è presente solo nell'8.

Analizziamo adesso un secondo esempio. Facciamo la scomposizione in fattori primi di 12: $12=2^2\times3$; e di 18: $18=2\times3^2$. Facciamo anche la scomposizione in fattori primi del *MCD* e del *mcm* di 12 e di 18: Il $MCD(12, 18)=6$, la scomposizione in fattori primi di 6 è: $6=2\times3$; il $mcm(12, 18)=36$, la scomposizione in fattori primi di 36 è: $36=2^2\times3^2$.

Confrontiamo le scomposizioni in fattori primi dei numeri di cui calcolare il *MCD* ed in *mcm* e di questi ultimi. Nel caso del *MCD* la scomposizione è composta dal 2 e dal 3, entrambi sono presenti sia nel 12 che nel 18, tutti e due elevati alla prima potenza con lo stesso esponente con cui il 2 è presente nel 18, ed il 3 è presente nel 12. Nel caso del *mcm* la scomposizione è composta dal 2 e dal 3; sia il 2 che il 3 sono presenti nel 12 e nel 18, il 2 con lo stesso esponente con cui è presente nel 12, il 3 con lo stesso esponente con cui è presente nel 18.

Possiamo provare a trarre una prima conclusione eventualmente da verificare.

È possibile ricavare il *MCD* di due numeri facendone la scomposizione in fattori primi e prendendo solamente i fattori presenti in entrambe le scomposizioni con l'esponente più basso.

È possibile ricavare il *mcm* di due numeri facendone la scomposizione in fattori primi e prendendo tutti i fattori presenti in ogni scomposizione con l'esponente più alto.

Verifichiamo la regola trovata applicandola all'esempio di *MCD* e di *mcm* con tre numeri.

Le scomposizioni di 12, 18 e 20 sono: $12=2^2\times3$, $18=2\times3^2$, $20=2^2\times5$.

Seguendo la regola ricavata sopra abbiamo che il *MCD(12, 18, 20)* è dato dal <u>prodotto dei fattori comuni ai tre numeri</u>, che è solo il 2, <u>elevati all'esponente più piccolo</u> con cui compare nelle scomposizioni che è 1. Il risultato è quindi *MCD(12, 18, 20)=2*.

Sempre seguendo la regola ricavata sopra abbiamo che il *mcm(12, 18, 20)* è dato dal <u>prodotto di tutti i fattori</u> presenti nelle scomposizioni (<u>presi una volta sola</u>) dei tre numeri, che sono il 2, il 3 ed il il 5 (il 2 presente nella scomposizione di tutti e tre i numeri; il 3 presente solo nelle prime due ed il 5 presente solo nella terza), <u>elevati all'esponente più grande</u> con cui compaiono nelle scomposizioni che sono 2 per il 2 nelle scomposizioni del primo e del terzo numero, 2 per il 3 nella scomposizione del secondo numero, 1 per il 5 nella scomposizione del terzo numero. Il risultato è quindi $mcm(12, 18, 20)=2^2\times3^2\times5=180$.

Esempi di esercizi svolti

Facciamo adesso due esempi commentati di svolgimento di un esercizio di calcolo di Massimo Comun Divisore e di minimo comune multiplo. Nel primo esempio tratteremo una coppia di numeri mentre nel secondo una tripla. L'estensione a casi con più di tre numeri è diretto.

Nel primo esempio calcoliamo il *Massimo Comun Divisore* e il *minimo comune multiplo* di 588 e di 2450: *MCD(588, 2450)*, *mcm(588, 2450)*.

Cominciamo con il ricavare la scomposizione in fattori primi di 588:

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$$

Quindi troviamo la scomposizione in fattori primi di 2450:

$$
\begin{array}{r|l}
2450 & 2 \\
1225 & 5 \\
245 & 5 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

$$2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$$

Come passo successivo troviamo il *Massimo Comun Divisore* di 588 e di 2450. Identifichiamo le basi comuni ad entrambe le scomposizioni (in questo caso il 2 ed il 7) e riportiamole, ciascuna una sola volta, moltiplicandole tra loro:

$$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \qquad\qquad 2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\mathrm{MCD}(588,\ 2450) = 2 \times 7$$

adesso troviamo, per ciascuna base, l'esponente minimo (in questo caso 1 e 2; ricordiamoci che un numero senza esponente equivale allo stesso numero elevato ad uno) ed usiamolo come esponente della base corrispondente nel *Massimo Comun Divisore*: *MCD(588, 2450).*

$$588 = 2^2 \times 3^1 \times 7^2 \qquad 2450 = 2^1 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\mathrm{MCD}(588,\ 2450) = 2^1 \times 7^2 = 2 \times 7^2 = 98$$

moltiplichiamo per ottenere il risultato cercato.

Passiamo adesso al *minimo comune multiplo*: *mcm(588, 2450)*. Per ottenerlo stavolta bisogna prendere tutte le basi presenti nelle scomposizioni ma anche questa volta solo una volta per ciascuna:

$$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \qquad 2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\mathrm{mcm}(588,\ 2450) = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

adesso troviamo, per ciascuna base, l'esponente massimo (in questo caso rispettivamente il 2, l'1, il 2 e ancora il 2) ed usiamoli come esponente della base corrispondente nel minimo comune multiplo:

$$588 = 2^{2} \times 3^{1} \times 7^{2} \qquad 2450 = 2^{1} \times 5^{2} \times 7^{2}$$

$$\mathrm{mcm}(588,\ 2450) = 2^{2} \times 3^{1} \times 5^{2} \times 7^{2} = 2^{2} \times 3 \times 5^{2} \times 7^{2} = 14700$$

moltiplichiamo per ottenere il risultato cercato.

Nel secondo esempio calcoliamo il Massimo Comun Divisore e il minimo comune multiplo di 5880, 2772 e di 9800: *MCD(5888, 2772, 9800)*, *mcm(588, 2772, 9800)*.

Cominciamo con il ricavare la scomposizione in fattori primi di 5880:

$$\begin{array}{r|l} 5880 & 2 \\ 2940 & 2 \\ 1470 & 2 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2$$

Quindi troviamo la scomposizione in fattori primi di 2772:

$$
\begin{array}{r|l}
2772 & 2 \\
1386 & 2 \\
693 & 3 \\
231 & 3 \\
77 & 7 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}
$$

$$2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

Ed infine troviamo la scomposizione in fattori primi di 9800:

9800	2
4900	2
2450	2
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$$9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$$

Troviamo il Massimo Comun Divisore di 5880, 2772 e di 9800. Identifichiamo le basi comuni ad entrambe le scomposizioni (anche in questo caso il 2 ed il 7) e riportiamole, ciascuna una sola volta, moltiplicandole tra loro:

$$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 \qquad 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \qquad 9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\text{MCD}(5880,\ 2772,\ 9800) = 2 \times 7$$

adesso troviamo, per ciascuna base, l'esponente minimo (in questo caso 2 e 1 rispettivamente) ed usiamolo come esponente della base corrispondente nel Massimo Comun Divisore:

$$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 \qquad 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7^1 \times 11 \qquad 9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\text{MCD}(5880,\ 2772,\ 9800) = 2^2 \times 7^1 = 2^2 \times 7 = 28$$

moltiplichiamo per ottenere il risultato cercato.

Passiamo adesso al minimo comune multiplo: 5880, 2772 e di 9800. Come per l'esempio precedente bisogna prendere tutte le basi presenti nelle scomposizioni ma anche questa volta solo una volta per ciascuna:

$$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 \qquad 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \qquad 9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\mathrm{mcm}(5880, 2772, 9800) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

troviamo, per ciascuna base, l'esponente massimo (in questo caso rispettivamente il 3, il 2, il 2 e ancora il 2 , l'1) ed usiamoli come esponente della base corrispondente nel minimo comune multiplo:

$$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 \qquad 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11^1 \qquad 9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$$

$$\mathrm{mcm}(5880, 2772, 9800) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^1 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 970200$$

moltiplichiamo per ottenere il risultato cercato (come potete notare, il mcm può facilmente diventare un numero molto grande).