

La scomposizione in fattori primi

“In matematica la fattorizzazione è la riduzione in fattori: fattorizzare un numero n significa trovare un insieme di numeri $\{a_0, a_1, a_2, a_3 \dots\}$ tali che il loro prodotto sia il numero originario ($n = a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots$).” [Cit. Wikipedia]

La scomposizione in fattori primi, o fattorizzazione in numeri primi o scomposizione in numeri primi, consiste nel trovare tutti i divisori primi (cioè non ulteriormente divisibili) di un numero non primo dato e moltiplicarli tra loro per riottenere il numero di partenza (per approfondire vedi la pagina sui Numeri Primi. Notate che il numero 1 non è un numero primo). Ad esempio: $4=2 \times 2=2^2$; $6=2 \times 3$.

Per ottenere la scomposizione in numeri primi, di numeri anche grandi, si utilizza un procedimento che illustriamo qui di seguito. Cominciamo con il primo numero non primo, cioè il 4.

Disegniamo una linea verticale e, in alto alla sua sinistra, il numero di cui vogliamo effettuare la fattorizzazione:

4 |

Cerchiamo adesso un divisore primo del numero, in questo caso è molto facile trovarlo perché è 2. L'ordine con cui si cercano e si trovano i divisori primi non è importante, come vedremo, tuttavia è meglio per semplicità cominciare con i più piccoli. Soprattutto se il

numero è pari perché è evidentemente divisibile per 2; scriviamolo quindi in alto alla sua destra:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \end{array}$$

Effettuiamo la divisione del dividendo (il 4), a sinistra della barra, con il divisore (il 2), a destra, e riportiamo il risultato a sinistra della barra sotto il primo numero:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & \end{array}$$

Dobbiamo trovare adesso il divisore di 2; questo è lo stesso 2 essendo un numero primo. Scriviamo 2 a destra della barra, sotto al 2 precedente:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}$$

Infine effettuiamo la divisione del dividendo (il 2), a sinistra della barra, con il divisore (il 2), a destra, e riportiamo come prima il risultato a sinistra della barra. In questo caso il risultato è 1 e questo pone fine al procedimento.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Abbiamo ottenuto la scomposizione che volevamo: 4 è divisibile due volte per 2, cosicché possiamo scriverlo come:

$$4=2 \times 2=2^2$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato la rappresentazione della moltiplicazione di numeri uguali come potenza.

Procediamo adesso con un esempio più complesso. Scomponiamo il numero 6860 in fattori primi. Procediamo come nell'esempio precedente:

6860 è un numero pari quindi è divisibile per 2. Il risultato è 3430 che è a sua volta pari e quindi divisibile per 2. Il risultato è 1715. 1715 è dispari e quindi non è più divisibile per 2. Proviamo con il 3 e ci accorgiamo che non è possibile. Proviamo allora con il numero primo successivo: il 5. Stavolta vediamo che è possibile effettuare la divisione perché tutti i numeri che terminano con il 5 sono divisibile per 5. Effettuiamo la divisione e riportiamo il risultato: 343. Quest'ultimo non è divisibile per 5 quindi passiamo a vedere se è possibile dividerlo per il numero primo successivo, il 7. 343 è

divisibile per 7 ed il risultato è 49, che è a sua volta divisibile per 7 con il risultato di 7, a sua volta divisibile per 7 con il risultato di 1 il che pone termine al procedimento.

6860	2
3430	2
1715	5
343	7
49	7
7	7
1	

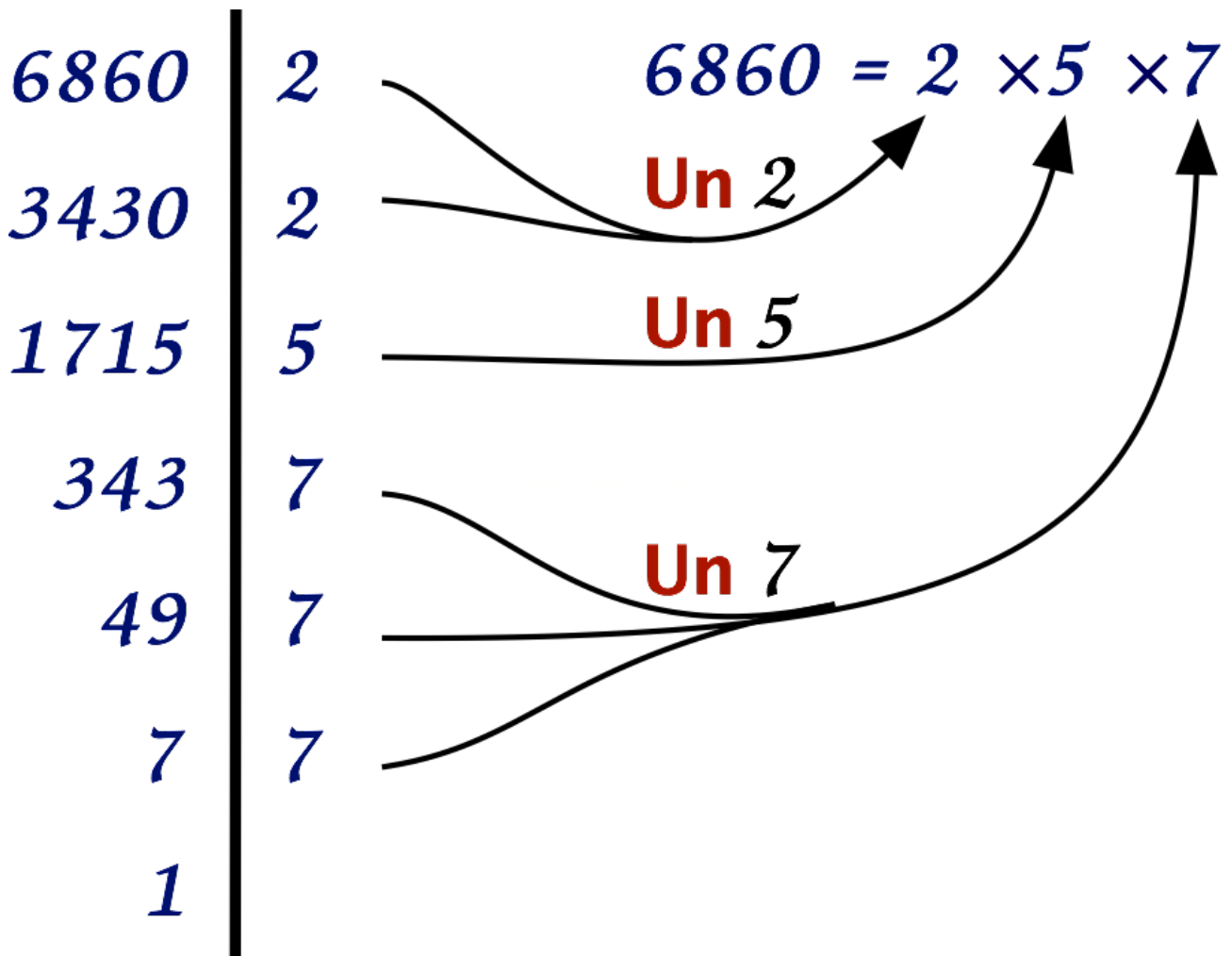
Quello che abbiamo fatto fino a qui è dividere consecutivamente il numero da fattorizzare per i suoi dividendi primi che abbiamo cercato passo per passo. Proviamo ad invertire il procedimento partendo dal basso della fattorizzazione, chiamiamola "in colonna", verso l'alto invertendo anche l'operazione. Partiamo dall'1 e moltiplichiamolo per 7: il risultato è 7. Moltiplichiamo il risultato per 7 ed otteniamo 49. Rimoltiplichiamolo per 7 per avere 343. Moltiplichiamo 343 per 5 ed otteniamo 1717. Moltiplichiamo 1715 per 2 ed otteniamo 3430, infine moltiplichiamo 3430 per 2 e riotteniamo 6860, cioè il numero di partenza.

Abbiamo ottenuto, quindi, che 6860 è uguale a:

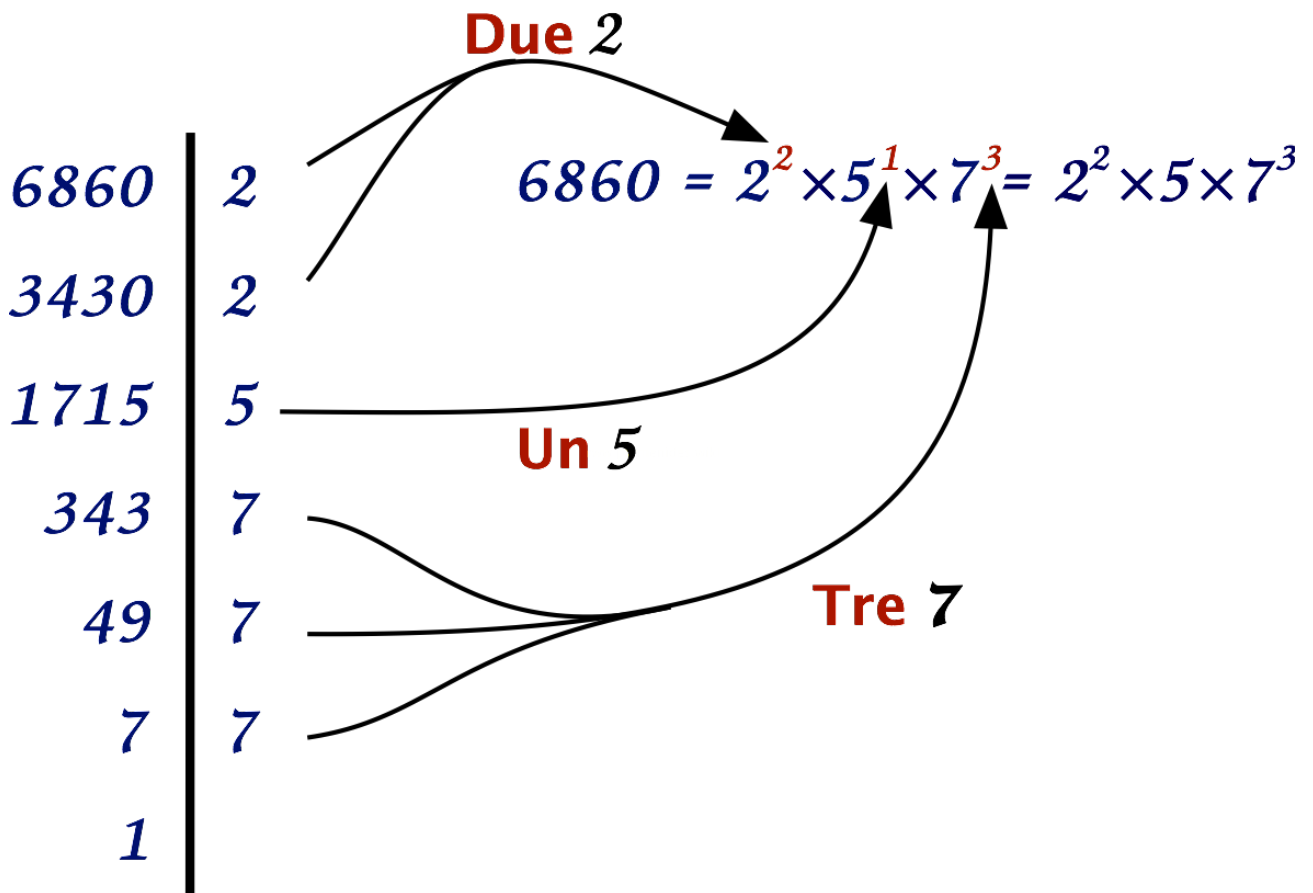
$$6860 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7^3$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la forma potenziale, più compatta e più adatta alle operazioni quali il massimo comun divisore ed il minimo comune multiplo.

Esiste un metodo più diretto per passare dalla fattorizzazione in colonna alla moltiplicazione di potenze. Infatti notiamo che le basi della fattorizzazione, espressa come moltiplicazione di potenze, sono i divisori primi presi ciascuno una sola volta, come è mostrato qui di seguito:



Gli esponenti, invece, sono le molteplicità (cioè il numero di volte) con cui si presentano i suddetti divisori primi:



Sul sito sono disponibili le scomposizioni in fattori primi dei primi centomila numeri naturali non primi.